Kolokwium z Rachunku prawdopodobieństwa II – 14.12.2022

Spośród poniższych zadań proszę wybrać 5. Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 10 punktów. W przypadku oddania 6 zadań, do oceny będzie się liczyć 5 ocenionych najniżej.

Rozwiązania poszczególnych zadań proszę oddawać na oddzielnych kartkach, podpisanych imieniem i nazwiskiem (drukowanymi literami) oraz numerem indeksu.

Odpowiedzi proszę udzielać w postaci zwartych wzorów. Mogą być wyrażone w terminach dystrybuanty standardowej zmiennej gaussowskiej. Należy precyzyjnie uzasadniać rozwiązania, powołując się na odpowiednie fakty z wykładu lub ćwiczeń.

A1 Niech X_n będzie n-wymiarowym wektorem losowym o rozkładzie jednostajnym na kuli w $\mathbb{R}^n$ o środku 0 i promieniu 1. Niech R_n będzie odległością X_n od 0.

a) Wykazać, że R_n zbiega do 1 według prawdopodobieństwa.

b) Czy ciąg $Y_n = n(1 - R_n)$ jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak – wyznaczyć granicę, w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.

A2 Niech μ będzie rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$.

a) Niech $Z_n = (X_n, Y_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, będą dwuwymiarowymi wektorami losowymi, takimi że X_n oraz Y_n mają rozkład μ. Wykazać, że z ciągu $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ można wybrać podciąg zbieżny według rozkładu.

b) Załóżmy, że miara probabilistyczna μ ma tę własność, że każdy ciąg $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ dwuwymiarowych wektorów losowych $Z_n = (X_n, Y_n)$, taki że jego współrzędne X_n i Y_n mają dla każdego n rozkład μ, jest zbieżny według rozkładu. Wykazać, że $\mu = \delta_a$ dla pewnej liczby $a \in \mathbb{R}$.

A3 a) Wykazać, że funkcja $\varphi(t) = \frac{1}{3}e^{-12t^2} + \frac{2}{3}\cos(2t)$ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej.

b) Niech $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ będzie takim ciągiem zmiennych losowych, że dla każdego $t > 0$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \varphi(t),$$

gdzie φ_{Z_n} oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej losowej Z_n. Czy ciąg $(\mathbb{E}e^{-Z_n^2})_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny? Jeśli tak – wyznaczyć granicę, w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.

A4 Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$, taki że zmienna X_k ma rozkład wykładniczy z parametrem $1/k$. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Czy ciąg zmiennych losowych

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var} S_n}}$$

jest zbieżny według rozkładu? Jeśli tak – wyznaczyć granicę, w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.

A5 Rzucamy kostką do momentu, gdy suma wyrzuconych oczek przekroczy 35300. Obliczyć w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że rzucimy więcej niż 10000 razy.

A6 Niech $X_0, X_1, \ldots$ będzie ciągiem i.i.d. zmiennych losowych o funkcji charakterystycznej φ spełniającej $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = -3$. Niech ponadto $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

a) Wykazać, że ciąg $M_n = \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}X_i$, $n \geqslant 1$, jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.

b) Znaleźć liczbę α, taką że ciąg $N_n = M_n^2 - \alpha \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2$, $n \geqslant 1$, jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.